МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

Г.А. Обухова

Математика (часть 2)

Методическое пособие и варианты заданий
для студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Рубцовск 2022

УДК [519.2; 512.1; 514.11; 517.1]

Обухова Г.А. Математика (часть 2): Методическое пособие и варианты заданий для студентов специальности «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» / Обухова Г.А., Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2022. – 46 с.

В пособии рассмотрены различные методы решения задач по математике, поясняющие основные теоретические положения, приведены тестовые задачи, используемые при собеседовании. Задачи подобраны в соответствии с программой по математике для СПО.

Пособие предполагает использование для самостоятельной подготовки к экзаменам и для планомерного повторения нужного материала.

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры ПМ РИИ.
Протокол № 7 от 22.02.22 г.

Рецензент: канд.экон.наук,
и.о. зав. кафедрой ЭиУ Д.В.Ремизов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Формулы для справок

Формулы сложения и вычитания:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta};\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

Формулы двойных, тройных и половинных углов:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};\quad ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha};\quad ctg3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Преобразование тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1-tg^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}; \qquad 1-ctg^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Некоторые важные соотношения:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha;$$

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

1.1. Преобразования тригонометрических выражений

Пример 1. Вычислить ctg 75^0.
Решение.
Первый способ:

$$ctg\,75^0 = \frac{\cos(45^0+30^0)}{\sin(45^0+30^0)} = \frac{\cos 45^0\cdot\cos 30^0 - \sin 45^0\cdot\sin 30^0}{\sin 45^0\cdot\cos 30^0 + \cos 45^0\cdot sin30^0} = \frac{\cos 30^0 - \sin 30^0}{\cos 30^0 + \sin 30^0} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Второй способ:

$$ctg\,75^0 = ctg\frac{150^0}{2} = \frac{1+\cos 150^0}{\sin 150^0} = \frac{1-\cos 30^0}{\sin 30^0} = 2-\sqrt{3}.$$

Ответ: $2-\sqrt{3}.$

Пример 2. Вычислить значение выражения

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{18}}-\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{18}}.$$

Решение:

$$\frac{1}{\sin 10^0}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}=\frac{\cos 10^0-\sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0\cdot\cos 10^0}=\frac{\frac{1}{2}\cos 10^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 20^0}=$$

$$\frac{\sin 30^0\cdot\cos 10^0-\cos 30^0\cdot\sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 20^0}=4\frac{\sin(30^0-10^0)}{\sin 20^0}=4.$$

Ответ: 4.

Пример 3. Доказать неравенство $\cos 20^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 80^0=\frac{1}{8}.$

Доказательство:

$$\cos 20^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 80^0=\frac{(\sin 20^0\cdot\cos 20^0)\cdot\cos 40^0\cdot\cos 80^0}{\sin 20^0}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\sin 40^0\cdot\cos 40^0)\cdot\cos 80^0}{\sin 20^0}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 80^0\cdot\cos 80^0}{\sin 20^0}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 160^0}{\sin 20^0}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 20^0}{\sin 20^0}=\frac{1}{8}.$$

Пример 4. Вычислить значение выражения

$$\frac{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\arccos\frac{1}{2}}.$$

Решение. $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$ В силу формулы $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ имеем

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi.$ Поэтому $\frac{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\arccos\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}=2.$

Ответ: 2.

Пример 5. Вычислить $\cos(2\arcsin\frac{2}{3})$.

Решение. В силу формулы $\cos 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha$ имеем

$$\cos(2\arcsin\frac{2}{3}) = \cos^2(\arcsin\frac{2}{3}) - \sin^2(\arcsin\frac{2}{3}) = \left(\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

1.2. Тригонометрические уравнения

Уравнения вида

$$P(\cos x \pm \sin x; \sin x \cdot \cos x) = 0,$$

где P(y; z) – многочлен, решаются заменой

$$\cos x \pm \sin x = t,$$

откуда

$$1 \pm 2\sin x \cdot \cos x = t^2.$$

Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 6. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos x$.

Решение. Обозначим $\sin x + \cos x = t$, откуда $1 + 2\sin x \cdot \cos x = t^2$. Наше исходное уравнение принимает вид:

$$t = 1 + \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Мы получили уравнение

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Его можно решать разными способами, как было показано выше. Применяя формулы двойного аргумента, получим:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$$

или

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Имеем $\sin\frac{x}{2}=0,$ откуда $\frac{x}{2}=\pi n,\ x=2\pi n.$ Имеем далее: $\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2},$ откуда $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Ответ: $x=\pi n;\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cdot\cos 2x.$$

Решение.

$$(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2-2\sin^2 2x\cdot\cos^2 2x=\sin 2x\cdot\cos 2x.$$

Обозначим $\sin 2x\cdot\cos 2x=y$. Получим

$1-2y^2=y\Rightarrow 2y^2+1-1=0\Rightarrow\ \Rightarrow y_1=-1,\ y_2=\frac{1}{2}.$ Возвращаясь к x, получим $\sin 2x\cdot\cos 2x=-1\Rightarrow\sin 4x=-2.$ Уравнение не имеет решений. $\sin 2x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin 4x=1\Rightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n.$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos x}=\sin x$$

при условии $x\in[\pi;3\pi].$

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат, учитывая, что они неотрицательны:

$1-\cos x=\sin^2 x\Rightarrow\cos^2 x-\cos x=0\Rightarrow\cos x(\cos x-1)=0.$

1) $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$ Но так как $\sin x\geq 0,\ x\in[\pi;\ 3\pi],$ имеем единственное значение $x=\frac{5}{2}\pi.$

2) $\cos x=1,\ x=2\pi n.$ В силу условия $x\in[\pi;3\pi]$ имеем $x=2\pi.$

Ответ: $2\pi;\ \frac{5}{2}\pi.$

Пример 9. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin x\right)\sin x+\left(1+\sin\frac{x}{4}-2\cos x\right)\cos x=0.$$

Решение. Раскрывая скобки, получим

$$\left(\sin x\cdot\cos\frac{x}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{4}\right)-2\sin^2 x-2\cos^2 x+\cos x=0;$$

$$\sin\left(x+\frac{x}{4}\right)-2+\cos x=0;$$

$$\sin\left(\frac{5}{4}x\right)+\cos x=2.$$

Так как функции $\sin\left(\frac{5}{4}x\right)$ и cos$x$ имеют наибольшее значение 1, то их сумма равна 2, если одновременно выполняются соотношения:

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{5x}{4}\right)=1\\ \cos x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5x}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=2\pi k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{5}(2+8n)\\ x=2\pi k\end{cases}.$$

Мы получили $\frac{\pi}{5}(2+8n)=2\pi k,$ откуда $k=\frac{4n+1}{5}.$ Число $\frac{4n+1}{5}$ является целым лишь при $n=5t+1;\, t\in Z.$ Отсюда $k=\frac{4(5t+1)+1}{5}=4t+1.$ Подставляя $k=4t+1$ в выражение $x=2\pi k,$ получаем:

Ответ: $x=2\pi(4t+1),\ t\in Z.$

Пример 10. Найти все решения уравнения

$$4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4};1\right].$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$4^{2\cos^2 x-1}+4^{\cos^2 x}=3.$$

Обозначив $4^{\cos^2 x}=t,\, t>0,$ будем иметь уравнение $\frac{1}{4}t^2+t-3=0\Rightarrow$ $\Rightarrow t^2+4t-12=0.$ Это уравнение имеет корни $t_1=-6,\, t_2=2.$ Так как t>0, то получаем t=2. Следовательно, $4^{\cos^2 x}=2\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем общее решение $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Отрезку $\left[\frac{3}{4};1\right]$ принадлежит лишь $x=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\frac{1+tgx+tg^2x+...}{1-tgx+tg^2x-...}=1+\sin 2x$$

при условии, что |tgx|<0.

Решение. Применим формулу суммы членов бесконечной прогрессии $S=\frac{a_1}{1-q}$, где $|q|<1$. Получим:

$$\frac{1}{1-tgx}:\frac{1}{1+tgx}=1+\frac{2tgx}{1+tg^2x}.$$

Замена tg$x$=y приводит нас к уравнению

$$\frac{1+y}{1-y}=1+\frac{2y}{1+y^2}\Rightarrow\frac{1+y}{1-y}=\frac{(1+y)^2}{1+y^2}.$$

Так как $|q|<1$, то $1+y\neq 0$. Сокращая обе части полученного уравнения на 1+у, получим:

$$\frac{1}{1-y}=\frac{1+y}{1+y^2}\Rightarrow 1+y^2=1-y^2\ \Rightarrow\ y=0\Rightarrow tgx=0.$$

Ответ: $x=\pi n$.

Пример 12. Решить уравнение

$$2\sin^2 x-3\cos x=0.$$

Решение. Подстановкой $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ это уравнение сводится к квадратному уравнению относительно $\cos x$: $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$. Так как $\cos x\neq 2$, то остается уравнение $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда следует: $x=\pm 60^0+360^0\cdot n$.

Ответ: $x=\pm 60^0+360^0\cdot n$.

Пример 13. Решить уравнение

$$2\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=4.$$

Решение. Правую часть уравнения представим в виде $4\cos^2 x+4\sin^2 x$. Разделив почленно на $\cos^2 x$ однородное уравнение $4\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0$, получим квадратное уравнение относительно tgx: $4tg^2x-2tg-1=0$. Решая квадратное уравнение, получаем: $tgx=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $x=arctg\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}+180^0n;\ x=-arctg\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}+180^0n$.

Пример 14. Решить уравнение

$$2\sin x+2\cos x+\sin 2x+1=0.$$

Решение. Левую часть данного уравнения удается разложить на множители:

$$2(\sin x+\cos x)+(\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x)=0;$$
$$2(\sin x+\cos x)+(\cos x+\sin x)^2=0;$$
$$(\sin x+\cos x)\cdot(2+\sin x+\cos x)=0.$$

Уравнение $\cos x+\sin x+2=0$ не имеет корней. Следовательно, имеем однородное уравнение $\cos x+\sin x=0$. Почленным делением на cosx получаем tgx=-1.

Ответ: $x=-45^0+180^0n.$

Пример 15. Решить уравнение

$$\sin 3x\cdot\sin 2x=\sin 11x\cdot\sin 10x.$$

Решение. Преобразуя произведения в суммы, получим $\frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 5x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 21x\right)$, откуда следует, что $\cos 5x-\cos 21x=0$. Представляя разность косинусов в виде произведения, разлагаем левую часть уравнения на множители: $\sin 13x\cdot\sin 8x=0$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi n}{13};\ x=\dfrac{\pi n}{8}$.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2.$$

Решение. *Первый способ.* Разделим обе части уравнения на 2: $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$. Так как $\frac{1}{2}=\cos 60^0$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0$, то введем вспомогательный угол $\varphi=60^0$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x=1$ или, короче, $\sin(x+\varphi)=1$. Отсюда получаем $x+\varphi=90^0+360^0 n$.

Ответ: $x=30^0+360^0 n$.

Замечание. Рассмотренным способом можно решать уравнения вида

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

где $c^2<a^2+b^2$.

Почленным делением на $\sqrt{a^2+b^2}$ получаем

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то можем положить: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, тогда получим $\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, т.е. $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Второй способ.

Применив формулы двойного аргумента, запишем данное уравнение в виде

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Разделим почленно полученное однородное уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$. Получим $2tg\frac{x}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot tg^2\frac{x}{2}=2+2tg^2\frac{x}{2}$.

Введя обозначение $t = tg\frac{x}{2}$, найдем:

$$(2+\sqrt{3})t^2 - 2t + (2-\sqrt{3}) = 0.$$

К этому же квадратному уравнению мы пришли бы, подставляя в исходное уравнение выражения:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Решая полученное квадратное уравнение, имеющее нулевой дискриминант, получим $tg\frac{x}{2} = 2-\sqrt{3}.$ В силу результата, полученного нами в примере 1 из п. 7.1, имеем: $ctg75^0 = tg15^0 = 2-\sqrt{3}.$ Следовательно,

$$\frac{x}{2} = arctg(2-\sqrt{3}) + 180^0 n = 15^0 + 180^0 n.$$

Ответ: $x = 30^0 + 360^0 n.$

Третий способ.

Возведем обе части исходного выражения в квадрат:

$$\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 4(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

При этом мы рискуем получить посторонние корни. Это однородное уравнение, которое почленным делением на $\cos^2 x$ приводится к квадратному уравнению относительно tgx: $3tg^2x - 2\sqrt{3}tgx + 1 = 0$ или

$$\left(\sqrt{3}tgx - 1\right)^2 = 0.$$

Итак, $tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ Откуда следует: $x = 30^0 + 180^0 k.$ При четном к мы получаем корни исходного уравнения, а при нечетном – корни уравнения $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2.$

Ответ: $x = 30^0 + 360^0 n.$

Пример 17. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

Решение. Применим формулу понижения степени: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Получим $\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$ - уравнение того же типа, что и в примере 15. Находим:

$$2\cos 3x \cdot \cos x = 2\cos 7x \cdot \cos x;$$
$$\cos x \cdot (\cos 3x - \cos 7x) = 0;$$
$$\cos x \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\cos x = 0;\ \ \sin 5x = 0;\ \ \sin 2x = 0.$$

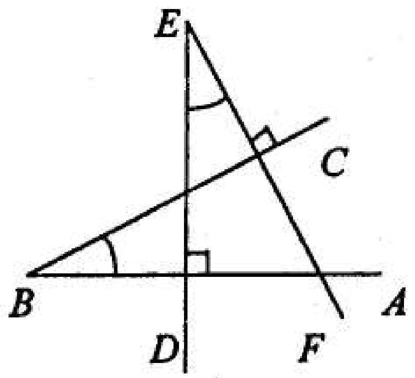
Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ x = \dfrac{\pi m}{5};\ x = \dfrac{\pi k}{2}.$

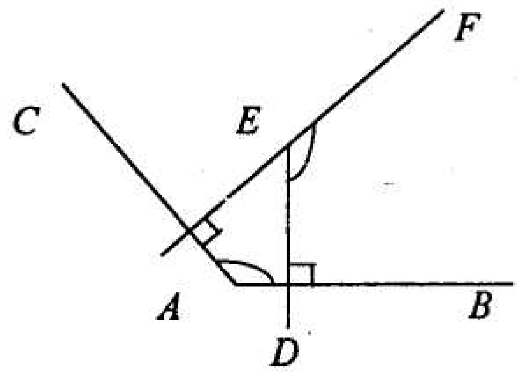
2. ПЛАНИМЕТРИЯ

Некоторые сведения

2.1. Треугольники и четырехугольники

1. Теорема о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами: если $\angle ABC$ *и* $\angle DEF$ оба тупые или оба острые и $AB \perp DF,\ BC \perp EF,$ *то* $\angle ABC = \angle DEF$.





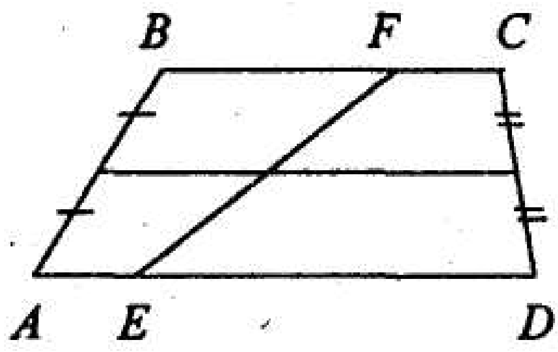
2. Свойства средней линии трапеции:

Средняя линия трапеции:

а) параллельна основаниям трапеции;

б) равна полусумме оснований трапеции;

в) делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями трапеции.



Эти свойства будут справедливы и для средней линии треугольника, если считать треугольник «вырожденной» трапецией, одно из оснований которой имеет длину, равную нулю.

3. Теорема о точках пересечения медиан, биссектрис и высот треугольника:

а) медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершины;

б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) высоты треугольника пересекаются в одной точке.

4. Свойство медианы в прямоугольном треугольнике: в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Верна и обратная терема: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

5. Свойство биссектрисы внутреннего угла: биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

6. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике: если a и b – катеты, c – гипотенуза, h – высота, a' и b' – проекции катетов на гипотенузу, то:

$$а)\ h^2 = a'\cdot b';\quad б)\ a^2 = c\cdot a';\ в)\ b^2 = c\cdot b';\ г)\ a^2 + b^2 = c^2;\ д)\ h = \frac{a\cdot b}{c}.$$

7. Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha.$

8. Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$ где R – радиус описанной около треугольника окружности.

9. Метрические соотношения в параллелограмме: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$.

2.2. Окружность

10. Свойства касательных к окружности:

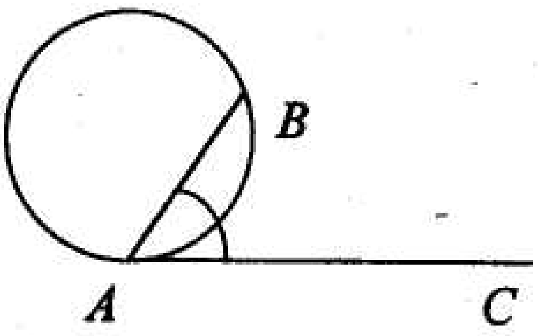
а) радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной;

б) две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

11. Измерение углов, связанных с окружностью:

а) центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается;

б) описанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается;



в) угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между касательной и хордой.

12. Теоремы об окружностях и треугольниках:

а) около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности служит точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника;

б) во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности служит точка пересечения биссектрис.

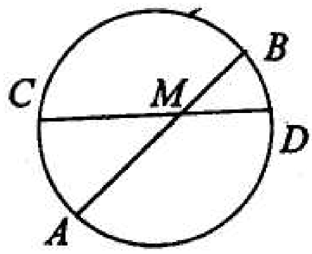
13. Теоремы об окружностях и четырехугольниках:

а) для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противолежащих углов четырехугольника была равна 180^0;

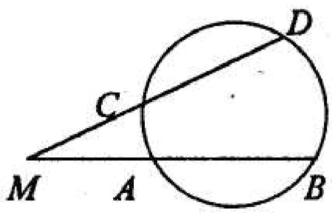
б) для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противолежащих его сторон были равны.

14. Метрические соотношения в окружности:

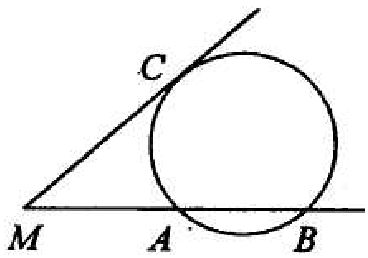
а) если хорды АВ и CD пересекаются в точке М, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$;



б) если из точки М к окружности проведены две секущие МАВ и MCD, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$;



в) если из точки М к окружности проведены секущая МАВ и касательная МС, то $AM \cdot BM = CM^2$.



2.3. Площади плоских фигур

15. Отношение площадей плоских фигур равно квадрату коэффициента подобия.

16. Если у двух треугольников равны основания, то их площади относятся как высоты; если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

17. Формулы для вычисления площади треугольника:

$а)\ D=\frac{a\cdot b}{2};\ б)\, S=\frac{a\cdot b\sin c}{2};\ в)\ S=\frac{abc}{4R};\ г)\ S=pr;$

$д)\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности.

18. Формулы площади выпуклого четырехугольника ABCD:

а) $S=AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$, где α - угол между AC и BD;

б) $S=p\cdot r$, где p – полупериметр четырехугольника, r – радиус вписанной окружности.

19. Формулы площади параллелограмма:

а) S=ah;

б) $S=ab\cdot\sin\alpha$, где α - угол между смежными сторонами a и b параллелограмма;

в) $S=\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\sin\varphi$, где d_1 и d_2 – диагонали параллелограмма, а φ - угол между ними.

20. Формула площади трапеции:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

21. Формула площади кругового сектора:

$$S=\frac{1}{2}R^2\alpha,$$

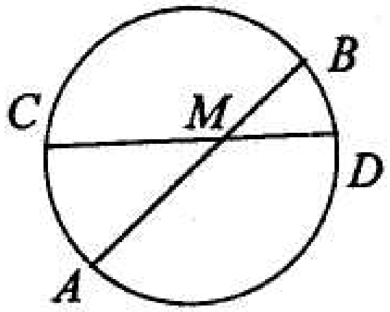
где α - радианная мера центрального угла.

22. Формула площади кругового сегмента:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha).$$

2.4. Примеры решения задач

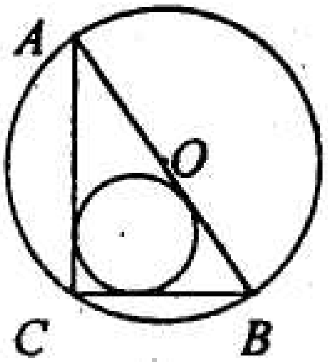
Задача 1. В круге проведены две пересекающиеся хорды. Одна из них, имеющая длину 10 см, делит другую хорду на части 3 см и 8 см. На какие части делится первая хорда?



Решение. Согласно теории AM·BM=CM·DM. Если AB=10 см, DM=3 см, CM=8 см, AM=x см, BM=(10-x) см, то: $x(10-x)=24$, $x^2-10x+24=0$, $x_1=4$, $x_2=6$.

Ответ: 4 см, 6 см.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 см и 12 см. В этот треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Вычислите радиусы этих окружностей.



Решение.

$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{144+25}=13$ (см);

$R=\frac{1}{2}AB=\frac{13}{2}$ (см), т.к. ∠C – прямой.

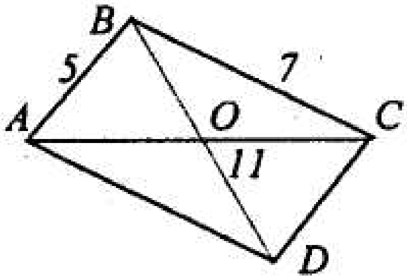
$r=\frac{S}{p}$; $S=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$ (см);

$p=\frac{5+12+13}{2}=15\ (см)$; $r=\frac{30}{15}=2\ (см)$.

Ответ: 2 см и 6,5 см.

Задача 3. Стороны треугольника равны 5 см, 7 см и 11 см. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

Решение.



Достроим треугольник до параллелограмма со сторонами 5 см и 7 см и диагональю 11 см. Тогда медиана BO будет равна половине диагонали BD. По теореме о соотношении между сторонами и диагоналями параллелограмма получаем:

$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2);$

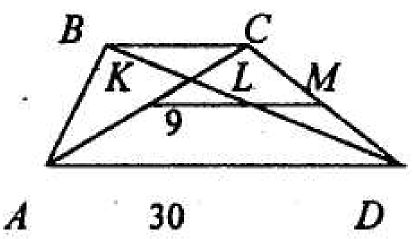
$BD^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2;$

$BD = \sqrt{2(25+49)-121} = 3\sqrt{3}\ (см) \Rightarrow BO = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ см.$

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ *см.*

Задача 4. Большее основание трапеции равно 30 см. Найдите меньшее основание трапеции, зная, что расстояние между ее серединами ее диагоналей равно 9 см.

Решение.



Продолжим KL до пересечения со стороной CD. KM – средняя линия в треугольнике ACD. Ее длина равна $\frac{1}{2}AD = 15$ см. LM=KM-KL=15-9=6 см. Но LM – средняя линия треугольника BDC. Она равна $\frac{1}{2}BC$, *следовательно*, $BC = 2 \cdot LM = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Задача 5. Высота равнобочной трапеции равна 14 см, основания равны 12 см и 16 см. Найдите радиус описанной окружности.

Решение.

R=OC=OD.

Из треугольника OEC получаем: $OE = \sqrt{R^2 - 36}$; из треугольника OFD $OF = \sqrt{R^2 - 64}$. Но OE+OF=14. Составляем алгебраическое уравнение

$$14 = \sqrt{R^2 - 36} + \sqrt{R^2 - 64}.$$

Это иррациональное уравнение. Решим его:

$196-28\sqrt{R^2-36}+R^2-36=R^2-64;$

$\sqrt{R^2-36}=8;$

$R^2-36=64;$

$R=\pm 10.$

Так как R>0, то R=10 (см).

Ответ: 10 см.

3. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Формулы для справок

Площади поверхностей и объемы многогранников

Площадь боковой поверхности призмы, пирамиды, усеченной пирамиды равна сумме площадей боковых граней

$$S_б=S_1+S_2+...+S_n.$$

Призма

а) Объем призмы (рис. 10.1) равен:

$$V=S_{осн}\cdot H,$$

где

$S_{осн}$ - площадь основания призмы,

H – высота призмы.

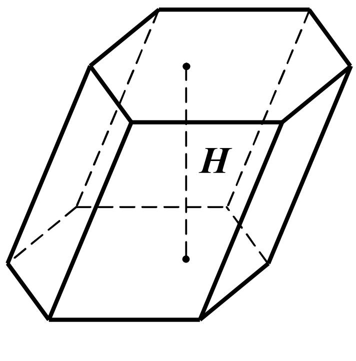


Рис. 10.1

б) Если призма прямая (рис. 10.2), то

$$S_б = 2p \cdot c,$$

$$V = S_{осн} \cdot c,$$

где

$S_б$ - площадь боковой поверхности призмы,

c – боковое ребро призмы,

p – полупериметр основания призмы,

V – объем призмы,

$S_{осн}$ - площадь основания призмы.

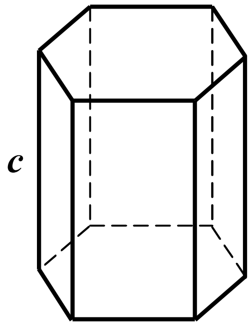


Рис. 10.2

в) Если призма является прямоугольным параллелепипедом с ребрами *a, b,* и *c* (рис. 10.3), то

$$S_б = 2(a+b)c,$$

$$V = abc,$$

где

$S_б$ - площадь боковой поверхности призмы,

V – объем призмы.

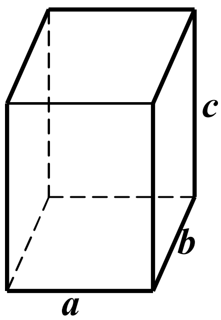


Рис. 10.3

Пирамида

а) Объем пирамиды (рис. 10.4) равен:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H,$$

где

$S_{осн}$ - площадь основания пирамиды,

H- высота пирамиды.

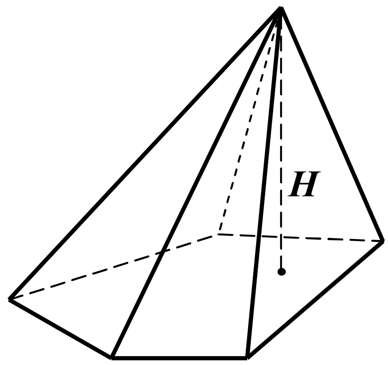


Рис. 10.4

б) Если пирамида – правильная (рис. 10.5), то

$$S_б = ph,$$

где

p – полупериметр основания призмы,

h – апофема правильной пирамиды.

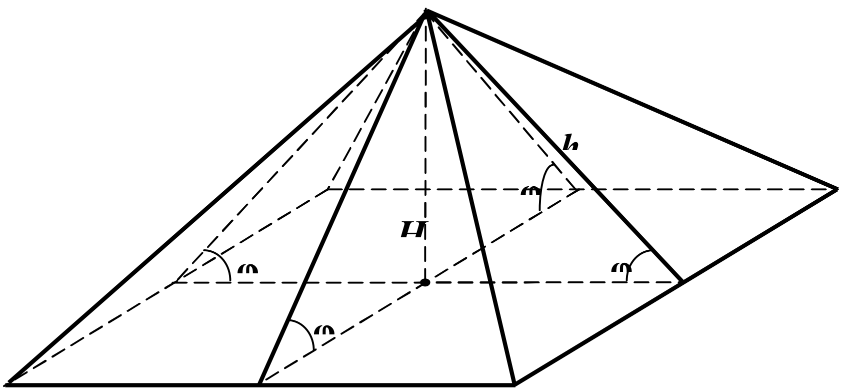


Рис. 10.5

в) Если все двугранные углы при ребрах основания равны φ, то

$$S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi},$$

где

$S_{осн}$ - площадь основания пирамиды

<u>Усеченная пирамида</u>

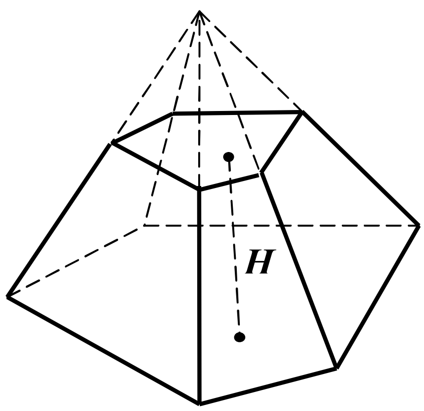
Если пирамида – правильная (рис. 10.6), то

$$S_б = (p_1 + p_2)h,$$

где

p_1 и p_2 - полупериметры оснований,

h – апофема правильной пирамиды.



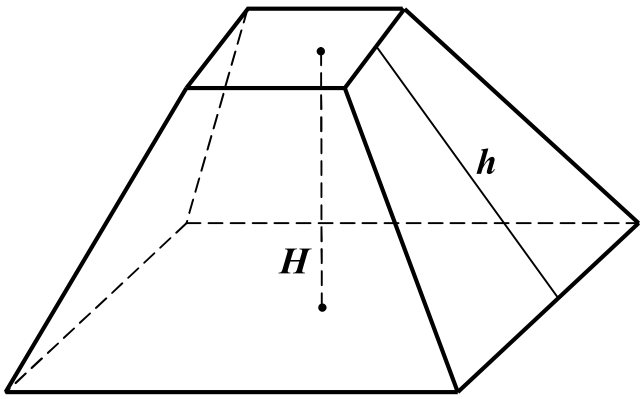


Рис. 10.6

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right),$$

где

S_1 и S_2 - площади оснований усеченной пирамиды,

H - высота усеченной пирамиды.

Площади поверхностей и объемы тел вращения

Цилиндр

Если радиус основания *R*, а высота – *H*, то

1. $S_б = 2\pi RH$,

2. $S = 2\pi R(R + H)$,

3. $V = \pi R^2 H$ (рис.10.7).

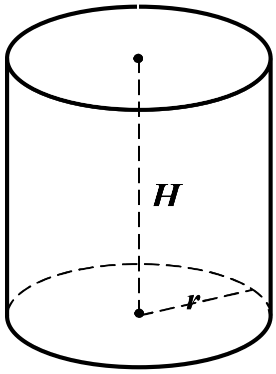


Рис. 10.7

Конус

Если радиус основания равен *r*, образующая равна *l*, а высота *H*, то

1. $S_б = \pi rl$,

2. $S = \pi r(l + r)$,

3. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$ (рис.10.8).

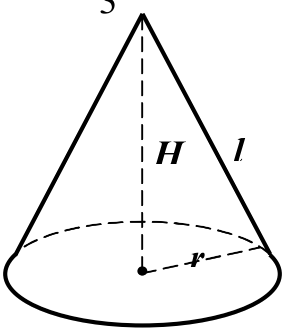


Рис. 10.8

Усеченный конус

Если радиусы оснований равны r_1 и r_2, образующая равна *l*, а высота – *H*, то

$$1.\ S_б = \pi\left(r_1 + r_2\right)l,$$

$$2.\ S = \pi\left(r_1 + r_2\right)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2,$$

$$3.\ V = \frac{1}{3}H\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$ (рис.10.9).

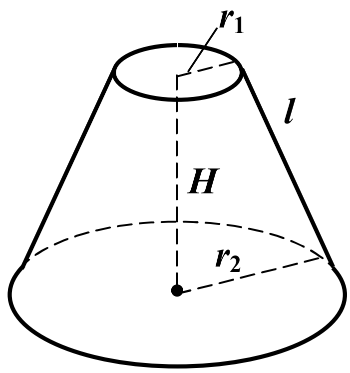


Рис. 10.9

Шар

Если радиус равен *R*, то

$$1.\ S = 4\pi R^2,$$

$$2.\ V = \frac{4}{3}\pi R^3$$ (рис. 10.10).

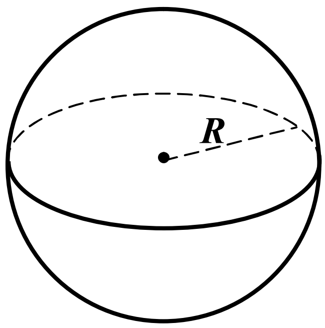


Рис. 10.10

Шаровой сегмент

Если высота сегмента равна h, а радиус шара равен R, то

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right) \text{ (рис. 10.11)}$$

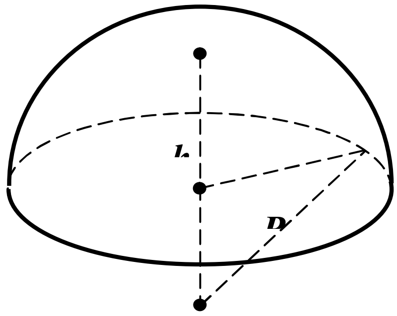


Рис. 11.11

Шаровой сектор

Шаровой сектор состоит из конуса и шарового сегмента. Если высота сегмента равна h, а радиус шара равен R, то

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h \text{ (рис. 11.12)}$$

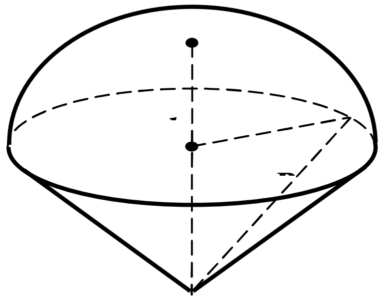
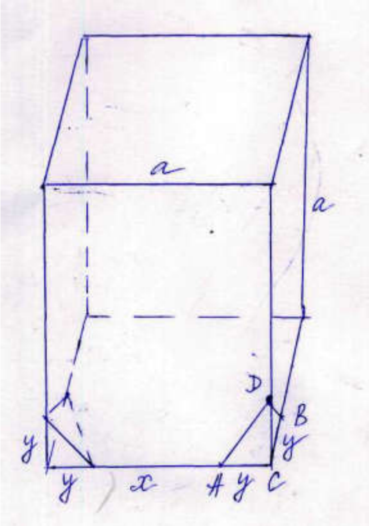


Рис. 11.12.

3.1. Примеры решения задач

Задача 1. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного многогранника.

Решение.



Для определения объема многогранника достаточно из объема данного куба вычесть объемы восьми равных правильных треугольных пирамид. Обозначим АД=x, АС=y, тогда получим из прямоугольного треугольника АДС систему:

$$\begin{cases} 2y = a - x \\ x^2 = 2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2y \\ y = a - a\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

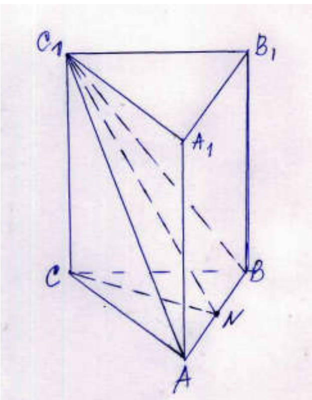
Тогда объем многогранника равен

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^3 = a^3 - \frac{4}{3}\left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3.$$

Ответ: $7a^3(\sqrt{2}-1)/3$.

Задача 2. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Площадь этого сечения равна S. Найти объем призмы.

Решение.



Имеем $\angle C_1NC = \alpha,\ S_{\triangle ACP} = S, V = S_{OCH} \cdot CC_1$; обозначим сторону основания через а, тогда $CC_1 = CN \cdot tg\alpha = a\sqrt{3}/2 \cdot tg\alpha$. $S_{\triangle ACB} = a^2\sqrt{3}/4$, но площадь ΔACB является проекцией ΔAC_1B на плоскость основания, поэтому $a^2\sqrt{3}/4 = S \cdot \cos\alpha \Rightarrow a = 2\sqrt{S\cos\alpha}/\sqrt[4]{3}$. Следовательно,

$$CC_1 = 2\frac{\sqrt{S\cos\alpha} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}} \cdot tg\alpha = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{S\cos\alpha} \cdot tg\alpha.$$

И тогда $V = \sqrt[4]{3} \cdot S\sqrt{S\cos\alpha} \cdot \sin\alpha$ (куб.ед).

4. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

БИЛЕТ№2

1. На заводе 35% всех рабочих - женщины, а остальные мужчины, которых на 252 человека больше, чем женщин. Определить общее число рабочих.

2. Решить неравенство $\frac{1}{x+3} < 0$ и в ответе записать наибольшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Дано двузначное число, у которого цифра единиц больше цифры десятков на 5, а утроенная сумма цифр равна самому числу. Найти это число.

4. Из двух городов, расстояние между которыми 135 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного из них 12 км/ч, а другого - 15 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

5. Решить уравнение $2^{|3-2x|} = 4^{|0,5x+7,5|}$ и в ответе записать больший его корень.

6. Решить уравнение $\sqrt{x} + |3\sqrt{x} - 2| = 10$.

7. Упростить выражение $\frac{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{5}{\sqrt{a^2+1}}$.

8. Найти (в градусах) наименьшее целое решение уравнения $tgx = -\frac{sinx}{\sqrt{1-sin^2x}}$, удовлетворяющее условиям $90° < x < 270°$.

9. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{\sqrt{2}}{4}(sinx - cosx)$.

10. Два мастера, работая равномерно, но с разной производительностью, выполнили задание за 20 ч. Если бы сначала первый сделал 1/3 задания, а затем второй - остальную часть, то общее затраченное время было бы равно 50 ч. За сколько часов может выполнить задание первый мастер, работая отдельно? Считать, что время меньше 100 ч.

БИЛЕТN3

1. Товар до снижения цен стоил 180 руб, а после снижения - 135 руб. На сколько процентов снижена цена товара?

2. Решить неравенство $\frac{2}{5-x} > 0$ и в ответе записать наибольшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Знаменатель несократимой дроби на 11 больше числителя. Если к числителю этой дроби прибавить 167, а к знаменателю прибавить 13, то после сокращения получится дробь, обратная данной. Найти знаменатель первоначальной дроби.

4. Два самолета вылетели одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 2400 км, и встретились через 4 ч. Найти (в км/ч) скорость второго самолета, если скорость первого самолета равна 350 км/ч.

5. Решить уравнение $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

6. Решить уравнение $\sqrt{3-x} + \sqrt{6+x} = 3$ и в ответе записать больший его корень.

7. Упростить выражение $\frac{(2-\sqrt{5})^2}{(3-2\sqrt[4]{5})(3+2\sqrt[4]{5})}$.

8. Найти (в градусах) решение x уравнения $cos^2 x = 3 + 3sinx$, удовлетворяющее условиям $-180° < x < 180°$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} sinx = sin2y, \\ cosx = siny. \end{cases}$$

В ответе записать (в градусах) $2x + y$ для $0° \le y \le 45°$, $0° \le x \le 90°$.

10. Два пешехода отправились одновременно из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 42 км. Первый шел половину времени со скоростью 3 км/ч, а вторую - со скоростью 4 км/ч. Второй шел первую половину пути со скоростью 4 км/ч, а вторую - со скоростью 3 км/ч. На сколько минут один из них пришел раньше другого к месту назначения?

БИЛЕТN4

1. Разделить число 120 на части, пропорциональные числам 3, 4 и 5. В ответе записать наибольшее из полученных чисел.

2. При каком наименьшем целом значении x график функции $y = 4x - 17$ лежит выше оси OX?

3. Пятнадцатую часть числа 60075 уменьшить на 906 и полученный результат уменьшить в 3 раза.

4. Токарь при норме 45 деталей за смену выполнил на план на 180%. Сколько деталей обточил токарь за смену?

5. Решить уравнение $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0$

6. Найти меньший корень уравнения $\sqrt{\frac{9}{x} - 20} = \frac{1}{x}$.

7. Упростить выражение $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} + \frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{a^2}$

8. Найти (в градусах) наибольшее целое решение уравнения $tgx = \frac{-sinx}{\sqrt{1-sin^2x}}$, удовлетворяющее условиям $90^\circ < x < 270^\circ$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} cosxcosy = 3/4, \\ cos(x-y) = 2cos(x+y). \end{cases}$$

В ответе записать (в градусах) $2x + y$ для $0^\circ < x < 45^\circ$, $0^\circ < y < 45^\circ$.

10. Два пешехода, находящиеся друг от друга на расстоянии 27 км, отправляются одновременно из пунктов A и B, двигаясь по прямой AB. Они встретятся через 3 ч, если будут идти навстречу друг другу, и через 9 ч, если будут идти в одном направлении. Найти скорость (в км/ч) более быстрого пешехода.

БИЛЕТ№5

1. Числитель дроби на 5 меньше ее знаменателя. Если к числителю этой дроби прибавить 17, а к знаменателю 2, то получится дробь,обратная данной. Найти числитель первоначальной дроби.

2. Решить неравенство $7x - 6 < x + 12$ и в ответе записать наибольшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Одно число больше другого на 108. Если одно из них разделить на другое, то в частном получится 5 и в остатке 4. Найти большее число.

4. Два самолета вылетели одновременно навстречу друг другу из двух городов и встретились через 4 ч. Найти (в км) расстояние между этими городами, если известно, что скорости самолетов равны 350 и 250 км/ч.

5. Решить уравнение $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0$

6. Решить уравнение $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = 4 - \frac{1-\sqrt{x+1}}{2}$.

7. Упростить выражение $\frac{(\sqrt{45}-\sqrt{20})(\sqrt{12}+\sqrt{75})7\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{180}}$.

8. Найти (в градусах) наименьшее целое решение x уравнения $|\frac{1}{sinx}| = \frac{1}{-sinx}$, удовлетворяющее условиям $-180° < x < 0°$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} sin^2x + sin^2y = 7/4, \\ x + y = 5\pi/6. \end{cases}$$

В ответе записать (в градусах) $2x - y$ для $0° < x < 90°, 0° < y \leq 90°$.

10. Две прямолинейные железные дороги пересекаются в пункте C. Из пункта A на одной железной дороге и из пункта B на другой одновременно d сторону C отправляются два поезда, движущихся равномерно: первый - со скоростью 20 км/ч, второй - со скоростью 30 км/ч. Известно, что $AC = 50$ км, $BC = 40$ км, $\angle ACB = 60°$. Через сколько часов расстояние между поездами (по прямой) вновь будет равно длине AB?

БИЛЕТN6

1. Разделить число 650 на две части так, чтобы 80% первой части были равны 24% второй части. В ответе записать большую часть.

2. Решить неравенство $3 - 7x \geq x - 5$ и в ответе записать наибольшее значение x, удовлетворяющее ему.

3. Два положительных числа относятся как 5:6. Разность между ними равна 11,5. Найти большее из этих чисел.

4. На 150 руб куплено 250 кг муки . Из этого запаса ежедневно расходуют муки на 6 руб. Сколько муки (в кг) останется через 16 дней?

5. Решить уравнение $3^{x^2-22x+109} = 1/3$ и в ответе записать сумму его корней.

6. Решить уравнение $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{13-x^2} = 2$ и в ответе записать отрицательный его корень.

7. Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} + \frac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) : \frac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{ab}} \cdot 4\sqrt{ab}$

8. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2}{1+sinx}$.

9. Найти наибольшее значение функции $y = 24cosx + 7sinx$.

10. Из A в B одновременно выехали два автомобиля с одинаковой скоростью. Первый повернул обратно как только он встретился с пешеходом, вышедшим из B в 8 ч утра, а второй, доехав до B в 9 ч утра, вернулся в A через 10 мин после возвращения в A первого автомобиля. Во сколько раз скорость автомобиля больше скорости пешехода?

БИЛЕТN7

1. Цех выпускал 180 изделий. После увеличения производительности труда цех стал выпускать 243 изделия. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

2. Решить неравенство $19 - 7x > -1 - 8x$ и в ответе записать наименьшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Разность двух чисел равна 10. Какое число надо прибавить к уменьшаемому, чтобы разность была равна нулю?

4. На устройство канализации на протяжении 160 м употребили 150 керамических труб длиной 0,8 и 1,2 м. Сколько труб длиной 0,8 м было использовано?

5. Решить уравнение $\frac{64}{2^{|5x+7|}} = 2^{5x-|2x|}, x \leq -1,4$.

6. Найти абсциссу точки пересечения графиков функций $y_1 = \frac{2+\sqrt{13-2x}}{3+x}$ и $y_2 = 1$.

7. Упростить выражение $(^{-}\sqrt[2]{1+a} + \sqrt{1-a}) : (^{-}\sqrt[2]{1-a^2} + 1) \cdot \sqrt{1-a} + a$.

8. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{4}{1-sinx}$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} cosx + cosy = -1/2, \\ x - y = 2\pi/3 \end{cases}$$

и в ответе записать (в градусах) $2x+3y$ для $0^\circ < x < 200^\circ, 0^\circ < y < 90^\circ$.

10. Пункты A и B расположены на прямолинейной магистрали в 9 км друг от друга. Из A в B выходит автомашина, движущаяся равномерно со скоростью 40 км/ч. Одновременно из B в том же направлении с постоянным ускорением 32 км/ч^2 выходит мотоцикл. Найти наибольшее расстояние (в километрах) между автомашиной и мотоциклом в течении двух часов движения.

БИЛЕТ№8

1. Для клуба решили купить 4 баяна и 3 аккордеона на сумму 1470 руб. После снижения цен на баян на 20% за эту же покупку уплатили 1326 руб. Найти цену аккордеона (в рублях). 2

2. Решить неравенство $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$ и в ответе записать наименьшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Сумма двух чисел равна 60, а разность их квадратов равна 480. Найти большее из этих чисел.

4. Спортивная команда завода в прошлом году состояла из 126 человек. В нынешнем году ее численность возросла до 214 человек, причем количество юношей увеличилось на 66, а количество девушек - в 2 раза. Сколько юношей было в прошлом году? 1

5. Решить уравнение $15^{2x+6} = 3^{x+9} \cdot 5^{4x}$.

6. Найти абсциссу точки пересечения графиков функций $y_1 = \sqrt{5x-1}$ и $y_2 = \sqrt{x+1} + \frac{6}{\sqrt{x+1}}$.

7. Упростить выражение $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}$.

8. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{1}{2+sinx}$.

9. Решить систему уравнений 4

$$\begin{cases} tgxtgy = 3, \\ x + y = 2\pi/3. \end{cases}$$

В ответе записать (в градусах) $2x + 6y$ для $0^\circ < x < 90^\circ$, $0^\circ < y < 90^\circ$.

10. Три землекопа должны выкопать канаву определенной длины. Если разделить канаву на три равные части, то первый закончит свою часть работы на 1 ч раньше второго и на 2 ч раньше третьего. Если же первый закончит свою часть работы и станет помогать третьему, то третий (вместе с первым) закончит свою часть работы на 12 мин раньше, чем второй закончит свою треть. За сколько часов первый землекоп закончит свою работу, работая отдельно?

БИЛЕТ№9

1. На сколько нужно увеличить число 252, чтобы 39% от него были бы равны 234?

2. Решить неравенство $\frac{2x-10}{0,5x+6} < 0$ и в ответе записать наибольшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Вычитаемое увеличили на 12 единиц. На сколько единиц надо увеличить уменьшаемое, чтобы разность увеличилась на 15 единиц?

4. Магазин приобрел книги за 43 руб.25 коп. со скидкой в 13,5% Сколько рублей стоили книги без скидки?

5. Решить уравнение $4^x 2^{|x-3|} = 2^{|x+2|}$.

6. Решить уравнение $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{2-x^2}} = 0$.

7. Упростить выражение $\frac{x+2}{y-1} + \frac{2x-y-1}{(x-1)(x-y)} : (\frac{x-y}{x^2+xy-y-1} - \frac{x-1}{x^2+x-y-y^2})$.

8. Найти наименьшее значение функции $y = 4sin^2x + 5cos^2x$.

9. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{3\sqrt{2}}{5}(sinx + cosx)$.

10. За 2,4 м ткани первого сорта, 3,6 м второго сорта и 4,8 м третьего сорта заплатили 103 руб. 20 коп. За 3,2 м ткани первого сорта, 4,8 м второго сорта и 2,4 м третьего сорта заплатили 105 руб. 60 коп. Сколько рублей стоят вместе 1,8 м ткани первого сорта, 2,7 м второго сорта и 7 м третьего сорта?

БИЛЕТ№10

1. На сколько процентов увеличится объем параллелепипеда, если все его измерения увеличить на 10%?

2. Решить неравенство $(2x+3)(2-2x) > 0$ и в ответе записать наибольшее целое значение x, удовлетворяющее ему.

3. Сумма двух положительных чисел равна 352. Частное от деления первого числа на 14 равно частному от деления второго числа на 2. Найти наименьшее из этих чисел.

4. На заводе в трех цехах работает 3500 человек. В первом цехе вдвое больше рабочих, чем во втором, а в третьем - на 100 больше, чем во втором. Сколько рабочих во втором цехе?

5. Решить уравнение $(\frac{4}{9})^x(\frac{27}{8})^{x-1} = \frac{2}{3}$.

6. Решить уравнение $\sqrt{2x+3-2\sqrt{2x+1}} = 1$.

7. Упростить выражение $2({}^{-2}\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}) : ({}^{-2}\sqrt{1-a^2} + 1) \cdot \sqrt{1-a} + 2a$.

8. Найти (в градусах) наименьшее целое решение x уравнения $cos x = -\sqrt{1 - sin^2 x}$, удовлетворяющее условиям $90° < x < 270°$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} sin x + sin y = 1, \\ x + y = \pi/3 \end{cases}$$

и в ответе записать (в градусах) $2x - y$ для $0° < y < 90°, 0° < x < 90°$.

10. Знаменатель несократимой положительной дроби меньше квадрата числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше чем $1/3$; если же от числителя и знаменателя отнять по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше 0,1. Найти числитель дроби.

БИЛЕТ№11

1. Произведение цифр двузначного числа в 2 раза больше суммы его цифр. Цифра единиц на 3 меньше цифры десятков. Найти это число.

2. Решить неравенство $\frac{2}{3-x} < 0$ и в ответе записать наименьшее целое число, удовлетворяющее ему.

3. Среднее арифметическое трех чисел равно 17,4. Одно из чи- 1
сел равно 17,5, второе равно 21,6. Найти третье число.

4. Мотоциклист проехал 105 км со скорость 35 км/ч, а оставшиеся 132 км - со скоростью, на 2 км/ч меньшей. Сколько часов затратил мотоциклист на весь путь?

5. Решить уравнение $(0,5)^{\sqrt{2x^2-6x-16}} = (0,5)^x$.

6. Решить уравнение $\frac{6}{\sqrt{x}} - \sqrt{3 + \frac{4}{x}} = 1$.

7. Упростить выражение $(\frac{n+3-\sqrt{n^2-9}}{n+3+\sqrt{n^2-9}} + \frac{n+3+\sqrt{n^2-9}}{n+3-\sqrt{n^2-9}})\frac{6}{n}$.

8. Найти (в градусах) наибольшее целое решение x уравнения 2
$cosx = -\sqrt{1 - sin^2x}$, удовлетворяющее условиям $90^\circ < x < 270^\circ$.

9. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{3\sqrt{2}}{5}(sinx + cosx)$.

10. Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной величины. Третий трактор может вспахать второе поле на 3 ч быстрее, чем первый вспашет первое поле, но на 2 ч медленнее, чем второй может вспахать первое поле. Первый и второй тракторы вместе могут вспахать первое поле на 6 ч быстрее, чем третий вспашет второе поле. За сколько часов третий трактор вспашет второе поле?

БИЛЕТ№12

1. Сумма цифр двузначного числа равна 12. От перестановки цифр число увеличивается на 75%. Найти это число.

2. Решить неравенство $3 + 2x \geq x + 4$ и в ответе записать наименьшее значение x, удовлетворяющее ему.

3. Первое слагаемое уменьшили на 105 единиц. Сколько единиц надо прибавить ко второму слагаемому, чтобы их сумма увеличилась на 15 единиц?

4. За 38 кг товара двух сортов заплатили 202 руб; 1 кг товара первого сорта стоил 6 руб, а 1 кг товара второго сорта стоил 5 руб Сколько товара второго сорта (в кг) было куплено?

5. Решить уравнение $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ и в ответе записать сумму его корней.

6. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 8x + 11} = \sqrt{x^2 - 7x} + \sqrt{11 - x}$ и в ответе записать больший его корень.

7. Упростить выражение $(\frac{8}{2a^2-8a} - \frac{3a+32}{a^3-64}) : \frac{a-8}{a^3+4a^2+16a} - rac44 - a$.

8. Найти (в градусах) решение x уравнения $sin^2x + 8sinxcosx - 9cos^2x = 0$, удовлетворяющее условиям $0° < x < 90°$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x - y = \pi/4. \end{cases}$$

В ответе записать (в градусах) $2x - 3y$ для $-90° < y < 45°$, $0° < x < 90°$.

10. Велосипедист выехал из пункта A в пункт B и ехал с постоянной скоростью 20 км/ч. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ км, его догнал автомобиль, вышедший из A на 15 мин позднее и шедший с постоянной скоростью. После того как велосипедист проехал еще 25 км, он встретил автомобиль, уже возвращавшийся из B, где он простоял полчаса. Найти расстояние между A и B (в км) с точностью до 0,1.

Таблица ответов

№ задания / № билета	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ 1	20	2	1	90	0,5	0,5	-1	45	-13	20
№ 2	840	-4	27	5	18	9	5	91	0,5	30
№ 3	25	4	13	250	1,5	3	1	-90	150	15
№ 4	50	5	1033	81	3	0,2	2	269	90	6
№ 5	7	2	134	2400	3	80	21	-179	30	3
№ 6	500	1	69	90	22	-3	4	1	25	11
№ 7	35	-19	-10	50	нет	2	1	2	540	16
№ 8	250	1	34	104	3	5	1	1	480	4
№ 9	348	4	27	50	-2,5	-1	-1	4	-1,2	104,6
№ 10	33,1	0	44	850	2	0	2	91	30	4
№ 11	63	4	13,1	7	8	4	4	269	1,2	12
№ 12	48	1	120	26	3	11	1	45	90	39,6

4.1. Примеры тестовых задач

I

1. В равнобочной трапеции периметр равен 12 см, основания равны 2 и 5 см. найти боковую сторону трапеции.

(Ответ: 2,5).

2. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол 30^0. Найти объем призмы, если сторона основания равна $\sqrt{2}$.

(Ответ: 4).

3. Найти площадь равнобочной трапеции со сторонами $\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; 2; 4.

(Ответ: 9).

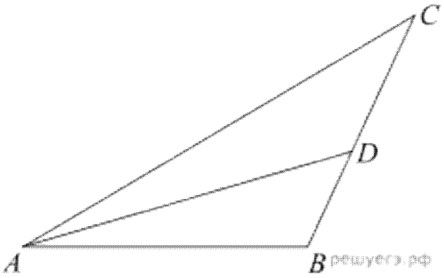
4. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 6 и 4 см, угол между ними составляет 30^0. Диагональ большей грани равна 10 см. найти объем параллелепипеда (в см^3).

(Ответ: 96).

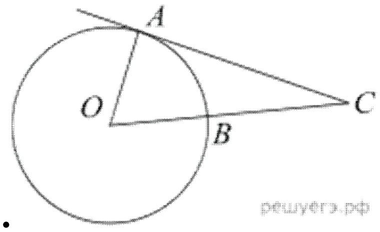
5.Упростить выражение $\dfrac{1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1}$.

(Ответ: 1).

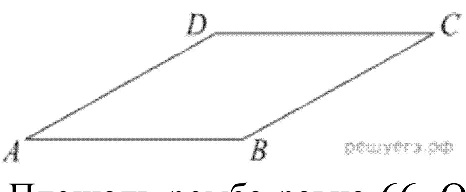
6. В ромб с острым углом 30^0 вписан круг, радиус которого равен 24. Найти длину стороны ромба.
(Ответ: 96).

7. 

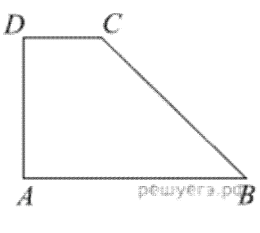
В треугольнике *ABC AD* — биссектриса, угол *C* равен 41°, угол *BAD* равен 69°. Найдите угол *ADB*. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 110

8. 

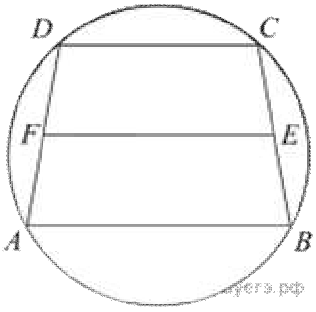
Угол *ACO* равен 35°, где *O* — центр окружности. Его сторона *CA* касается окружности. Найдите величину меньшей дуги *AB* окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 55

9. 

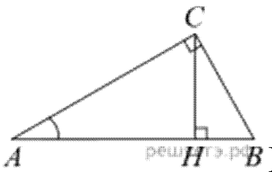
Площадь ромба равна 66. Одна из его диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.
Ответ: 33

10. 

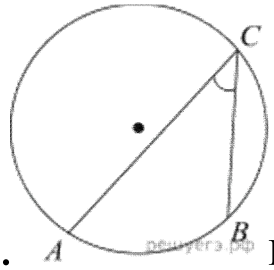
Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 45



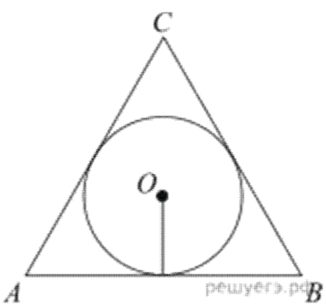
11. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 24, средняя линия равна 11. Найдите боковую сторону трапеции.
Ответ: 1



12. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AC = 3$, $\cos A = \frac{1}{6}$. Найдите BH.
Ответ: 17,5

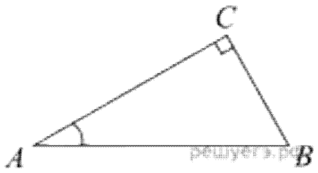


13. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 36

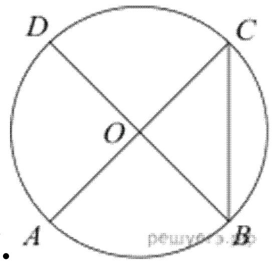


14.
Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 138.
Ответ: 46

15. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\sin BAC = 0,5$. Найдите высоту AH.
Ответ: 4

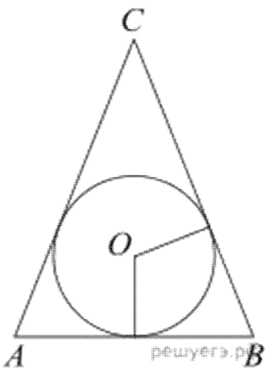
16. 

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 4,8,$ $\sin A = \frac{7}{25}.$ Найдите $AB.$
Ответ: 5

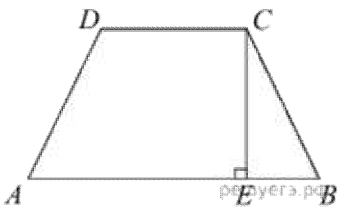
17. 

В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 35

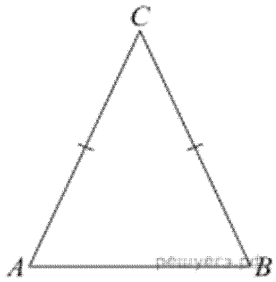
18. Одна сторона треугольника равна $\sqrt{2},$ радиус описанной окружности равен 1. Найдите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 45

19. 

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.
Ответ: 22

20. 

Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.
Ответ: 0,96

21. 

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 45. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 506,25

22. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x-6)}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Ответ: 1

23. Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -1

24. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(x+9)}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Ответ: 4

25. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x-3)}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -2

26. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}.$ В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -4

27. Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi(2x+9)}{3}=\frac{1}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -1

28. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(8x+3)}{6}=0,5.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Ответ: 0,25

29. Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{1}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.
Ответ: -4

30. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(4x-5)}{4}=-1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.
Ответ: -1

31. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(2x-3)}{6}=-0,5.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.
Ответ: 1

32. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(4x-3)}{4}=1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.
Ответ: -0,75

33. Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi(x+1)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.
Ответ: -2

34. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x+3)}{3}=-\sqrt{3}.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.
Ответ: -1

35. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{8\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ В ответе запишите наибольший отрицательный корень.
Ответ: -0,125

36. Найдите значение выражения $\frac{50\sin 19^\circ\cdot\cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}.$
Ответ: 25

37. Найдите значение выражения $\frac{19}{\cos^2 37^\circ+1+\cos^2 53^\circ}.$
Ответ: 9,5

38. Найдите значение выражения $\frac{3\sin(\alpha-\pi)-\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\alpha-\pi)}.$
Ответ: 2

39. Найдите $30\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.
Ответ: -27,6

40. Найдите значение выражения $\sin 46^\circ \cos 134^\circ + \sin 134^\circ \cos 46^\circ$.
Ответ: 0

Обухова Галина Александровна

Математика (часть 2)

Методическое пособие и варианты заданий
для студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Подписано к печати 28.02.22. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,87. Тираж 25 экз. Зак. 221804. Рег. № 5.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.